בחינת גמר בחדו"א 2 מ'2 (104022)

מועד ב'

סמסטר אביב תשע"ד

מספר הסטודנט	

<u>הוראות לנבחן</u>:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- כל חומר עזר אסור לשימוש (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש לשמור על המחברת בשלמותה (אין להוסיף או לתלוש דפים).
- עליכם לענות על כל השאלות בבחינה.
- על כל הפתרונות להופיע במחברת הזו.
- נא להשתמש בעט בלבד.

שאלות	ניקוד
חלק א'	
חלק ב'	
9	
10	
סה"כ	

בהצלחה!

חלק א'

בכל אחת מארבע השאלות הבאות הקף את התשובה הנכונה (כל תשובה נכונה מזכה בחמש נקודות).

שאלה 1

פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ נתונה ע"י $f(x,y,z)=Axy^2+Byz+Cx^3z^2$.

הנגזרת המכוונת המקסימלית של f בנקודה $(1,2,-1)$ היא בכיוון $(0,0,1)$ וערכה 32. אז (A,B,C) שווה ל-:

א. $(-4,12,3)$ ב. $(3,-4,12)$ ג. $(12,4,-3)$ ד. $(3,12,-4)$

שאלה 2

האינטגרל $I=\int_C z^3dx+3y^2dy-x^3dz$ כש-C הוא המעגל $C=\{(x,y,z)\mid x^2+z^2=1,\ y=1\}$ בכיוון מ-$(0,1,1)$ דרך $(1,1,0)$ ל-$(0,1,1)$ שווה ל-:

א. $\frac{3\pi}{2}$ ב. π ג. 0 ד. $\frac{\pi}{2}$

שאלה 3

ערכו של הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{(1-\cos(2xy))(y-1)}{x^2y^2\sin(\pi y)}$

כאשר $(x,y)\in D$, $D=\{(x,y)\mid x\neq0,\ y\neq1\}$ הוא:

א. 0 ב. $\frac{2}{\pi}$ ג. $-\frac{2}{\pi}$ ד. 1

שאלה 4

תהי $z(x,y)=e^x\cos y$ כאשר x ו-y הן פונקציות של t הנתונות בצורה סתומה ע"י המשוואות:

$$\begin{cases}x^3+e^x-t^2-3t=1\\ yt^2+y^2t=t-y\end{cases}$$

מהו הערך של $\frac{dz}{dt}$ כש-$t=0$ (שִׂימוּ לֵב כי במקרה זה: $x=y=0$)?

א. 0 ב. 3 ג. $\frac{1}{3}$ ד. $-\frac{1}{3}$

חלק ב'

נכון או לא נכון (כל תשובה נכונה מזכה בחמש נקודות).

שאלה 5

הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת במישור x,y באמצעות קואורדינטות פולריות:

$$f(r,\theta)=r^2\,\theta(2\pi-\theta)(\theta-r) \qquad r\ge 0,\ \ 0\le\theta<2\pi$$

הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(x,y)=(0,0)$ למרות שבנקודה זאת קיימת נגזרת מכוונת בכל כיוון.

נכון / לא נכון

שאלה 6

לפונקציה משאלה 5 יש מינימום מקומי בנקודה $(x,y)=(0,0)$.

נכון / לא נכון

שאלה 7

אם בנקודה M_0 קיים למשטח S מישור משיק T, אז לכל עקום על S העובר דרך M_0 שיש לו ישר משיק בנקודה זו הישר הזה נמצא כולו על T.

נכון / לא נכון

שאלה 8

אם השדה $\vec{F}(x,y)$ משמר בתחום A וגם בתחום B, אז הוא משמר גם ב-$A\cup B$.

נכון / לא נכון

חלק ג'

ענו על שתי השאלות הבאות (כל שאלה שווה 30 נקודות).

שאלה 9

יהי K הטורוס המלא (גוף נפחי כולל הפנים) הנתון ע"י הפרמטריזציה

$$K=\left\{x=r\cos\theta,\ \ y=\left(2+r\sin\theta\right)\cos\phi,\ \ z=\left(2+r\sin\theta\right)\sin\phi \mid\ 0\le r\le 1,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le\phi\le 2\pi\right\}$$

ונסמן ב- S את פני הטורוס K. כמו כן נתון השדה הוקטורי $\vec{F}\left(x,y,z\right)=2x\bar{i}-4y\bar{j}+3z\bar{k}$.

א. חשבו את הנפח של K.

ב. חשבו את השטף $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ כאשר $\vec{n}$ נורמל חיצוני של S.

ג. חשבו את העבודה $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר C מסלול חלק כלשהו ב-K מהנקודה $\left(0,2,0\right)$ לנקודה $\left(1,2,0\right)$.

ד. האם קיים שדה וקטורי $\vec{H}$ גזיר ברציפות כך ש- $\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{H}$? נמקו!

ה. חשבו את השטח של S .

<u>שאלה 10</u>

נתון העקום המישורי $C=\{(x,y)\mid x^2+xy+y^2=3\}$.

א. הראו של-C יש פרמטריזציה מהצורה $\begin{cases} x(\theta)=a\cos\theta+b\sin\theta \\ y(\theta)=a\cos\theta-b\sin\theta \end{cases}$, כאשר $0\le\theta\le 2\pi$ ו- $0<a<b$.

חשבו את a, b .

ב. חשבו את $\int_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+xy+y^2}$ (נגד כיוון השעון).

הערה: ניתן לענות על הסעיפים ג' ו-ד' גם אם לא מצאתם במפורש את a ו-b.

ג. מהו השטח של התחום D ש-C שפתו.

ד. חשבו את המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$ על העקום C.